Система оценивания

Ответы к заданиям В1–В15

Каждое из заданий В1–В15 считается выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Каждое верно выполненное задание оценивается 1 баллом.

№ задания	Ответ
B1	8
B2	320
B3	7
B4	192 000
B5	12
B6	0,92
B7	9
B8	64
B9	3
B10	4
B11	–0,8
B12	751
B13	20
B14	5
B15	–5

Решения и критерии оценивания заданий С1–С6

Количество баллов, выставляемых за выполнение заданий С1–С6, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, в частности, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное число баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

В критериях оценивания конкретных заданий содержатся общие требования к выставлению баллов.

При выполнении задания можно использовать без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) Министерством образования и науки Российской Федерации.

C1

а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Решение.

а) Преобразуем обе части уравнения:

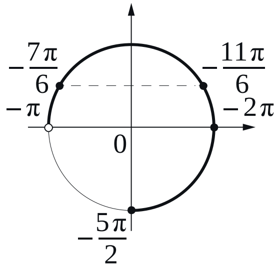
$$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x;\ 2\sin^2 x - \sin x = 0;\ \sin x(2\sin x - 1) = 0,$$

откуда $\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Из уравнения $\sin x = 0$ находим: $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ находим: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.



Получаем числа: -2π; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) πn, $n \in \mathbb{Z}$; $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) -2π; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б* ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 5$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $2:3$, считая от вершины B. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_1.

Решение. Сечение плоскостью AOC_1 пересекает ребро DD_1 в точке P. Отрезок AP параллелен отрезку C_1O, отрезок C_1P параллелен отрезку AO. Следовательно, искомое сечение — параллелограмм AOC_1P (рис. 1).

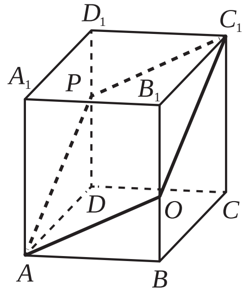


Рис. 1

$$BO = \frac{2}{5}BB_1 = 2,\ B_1O = 3.$$

$$C_1O = \sqrt{C_1B_1^2 + B_1O^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13};$$

$$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

Значит, AOC_1P — ромб. Найдем диагонали этого ромба:

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1^2} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38},$$

$$OP = 2\sqrt{AO^2 - \frac{1}{4}AC_1^2} = \sqrt{4 \cdot 13 - 38} = \sqrt{14}.$$

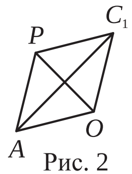


Рис. 2

Тогда $S_{AOC_1P} = \frac{AC_1 \cdot OP}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{38} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{133}$.

Ответ: $\sqrt{133}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, ИЛИ при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{3-x}\dfrac{x+4}{(x-3)^2} \ge -2, \\ x^3+6x^2+\dfrac{21x^2+3x-12}{x-4} \le 3. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$\log_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^2} \ge -2;\ \log_{3-x}(x+4)-\log_{3-x}(x-3)^2 \ge -2;\ \log_{3-x}(x+4) \ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<3-x<1$.

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+4) \ge 0, \\ 0<3-x<1; \end{cases} \begin{cases} 0<x+4 \le 1, \\ 2<x<3; \end{cases} \text{ нет решений.}$$

Второй случай: $3-x>1$.

$$\begin{cases} \log_{3-x}(x+4) \ge 0, \\ 3-x>1; \end{cases} \begin{cases} x+4 \ge 1, \\ x<2, \end{cases} \text{ откуда } -3 \le x < 2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3 \le x < 2$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+6x^2+\frac{21x^2+3x-12}{x-4} \le 3;\ x^3+6x^2+\frac{21x^2}{x-4} \le 0;$$

$$\frac{x^4+2x^3-3x^2}{x-4} \le 0;\ \frac{x^2(x-1)(x+3)}{x-4} \le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le -3$; $x=0$; $1 \le x < 4$.

3. Решение исходной системы неравенств: $x=-3$; $x=0$; $1 \le x < 2$.

Ответ: -3; 0; $[1;2)$.

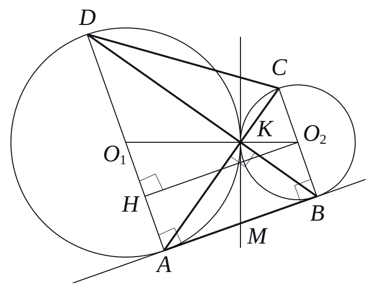
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение.



а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM=KM$ и $KM=BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, — прямоугольный.

Вписанный угол AKD — прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) Пусть, для определенности, первая окружность имеет радиус 4, а радиус второй равен 1.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\dfrac{AD}{BC}=4$. Пусть $S_{BKC}=S$, тогда $S_{AKD}=16S$.

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\dfrac{S_{AKD}}{S_{AKB}}=\dfrac{DK}{KB}=\dfrac{AD}{BC}$, то есть $S_{AKB}=4S$. Аналогично, $S_{CKD}=4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр O_2H, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1:

$$O_2H=\sqrt{O_1O_2^2-O_1H^2}=4.$$

Тогда

$$S_{ABCD}=\frac{AD+BC}{2}\cdot AB=20.$$

Следовательно, $25S=20$, откуда $S=0{,}8$ и $S_{AKB}=4S=3{,}2$.

Ответ: 3,2.

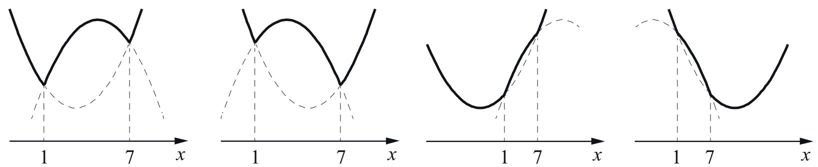
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+\left|x^2-8x+7\right|$ больше 1.

Решение. При $x^2-8x+7\ge 0$: $f(x)=x^2+2(a-4)x+7$, а её график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4-a$.

При $x^2-8x+7<0$: $f(x)=-x^2+2(a+4)x-7$, а её график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все четыре возможных вида графика функции $f(x)$ показаны на рисунках.



Наименьшее значение функция $f(x)$ может принять только в точках $x=1$, $x=7$ или $x=4-a$. Поэтому наименьшее значение функции $f(x)$ больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1)>1, \\ f(7)>1, \\ f(4-a)>1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a>1, \\ 14a>1, \\ 2a(4-a)+\left|a^2-9\right|>1; \end{cases} \quad \begin{cases} a>\dfrac{1}{2}, \\ 2a^2-8a+1-\left|a^2-9\right|<0. \end{cases}$$

Если $\dfrac{1}{2}<a<3$, то $3a^2-8a-8<0$, откуда $\dfrac{4-\sqrt{40}}{3}<a<\dfrac{4+\sqrt{40}}{3}$. Этот промежуток содержит интервал $\dfrac{1}{2}<a<3$.

Если $a\ge 3$, то $a^2-8a+10<0$, откуда $4-\sqrt{6}<a<4+\sqrt{6}$. Значит, $3\le a<4+\sqrt{6}$.

Объединяя найденные промежутки, получаем: $\dfrac{1}{2}<a<4+\sqrt{6}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}<a<4+\sqrt{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений *a*	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений *a*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k-8l+0\cdot m=-3(k+l+m)$.

а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k+l+m$ — количество целых чисел — делится на 4. По условию $40<k+l+m<48$, поэтому $k+l+m=44$. Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведём равенство $4k-8l=-3(k+l+m)$ к виду $5l=7k+3m$. Так как $m\geq 0$, получаем, что $5l\geq 7k$, откуда $l>k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Подставим $k+l+m=44$ в правую часть равенства $4k-8l=-3(k+l+m)$: $4k-8l=-132$, откуда $k=2l-33$. Так как $k+l\leq 44$, получаем: $3l-33\leq 44$, $3l\leq 77$, $l\leq 25$, $k=2l-33\leq 17$; то есть положительных чисел не более 17.

в) Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число -8 и два раза написан 0. Тогда $\frac{4\cdot 17-8\cdot 25}{44}=-3$; указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — в п. *в* приведён пример, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4