Высота в треугольнике

Ответы

1. Задачи из видеоурока

1. 4. **2.** 7. **3.** 202,8. **4.** 2 : 5. **5.** $\frac{4}{5}$. **6.** $\frac{9}{2}$. **7.** $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

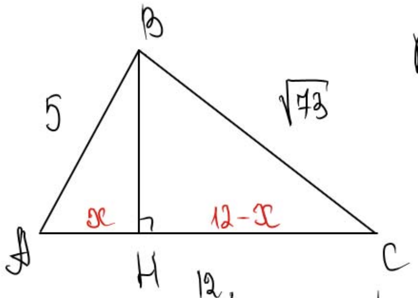
2. Задачи для самостоятельного решения

1. 5,2. **2.** 2,31.

Решения и комментарии

1. Задачи из видеоурока

9.110. Длины сторон треугольника равны 5, $\sqrt{73}$ и 12. Вычислить абсолютную величину разности длин отрезков, на которые высота делит сторону длиной 12.



12

$\Delta = |12 - x - x| = 4.$

$BH^2 = 25 - x^2 = 73 - (12-x)^2$

$(12-x)^2 - x^2 = 48.$

$(12 - x - x)(12 - \cancel{x} + \cancel{x}) = 48$

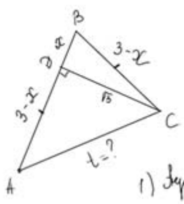
$12 - 2x = 4$ $\quad x = 4$

$2x = 8$ $\quad 12 - x = 8.$

1.

В треугольнике ABC основание D высоты $CD = \sqrt{3}$ лежит на стороне AB. Найдите квадрат стороны AC, если $AB = 3$ и $AD = BC$.

229



Дано: $\triangle ABC$: $CD \perp AB$,
$CD = \sqrt{3}$, $AB = 3$.
$AD = BC$,

Найти $AC^2 = ?$

Решение:

1) Пусть $BD = x \Rightarrow AD = 3 - x$
$BC = AD = 3 - x$;

2) $\triangle BDC$: $\angle BDC = 90° \Rightarrow$ по т. Пифагора:
$BC^2 = BD^2 + CD^2 \to (3-x)^2 = x^2 + 3$

3) $BD = 1 \Rightarrow AD = 2 \Rightarrow$ по т. Пифагора для $\triangle ADC$:
$AC^2 = AD^2 + CD^2 = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7.$

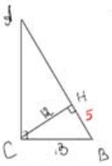
$(3-x)^2 = x^2 + 3$
$9 - 6x + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 3$
$-6x = -6$
$x = 1$

$\boxed{\text{Ответ: } 7}$

2.

Найдите площадь прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен 13, а высота, проведенная к гипотенузе, равна 12.

230



Дано: $\triangle ABC$. $\angle ACB = 90^\circ$;
$BC = 13$;
$CH = 12$ – высота;

Найти $S_{ABC} = ?$

Решение: 1) $\triangle BCH$: по т. Пифагора

$BC^2 = CH^2 + BH^2$

$13^2 = 12^2 + BH^2$

$BH^2 = 13^2 - 12^2 = (13-12)(13+12) = 25$;

$BH = 5$.

$$\begin{array}{r} \times\ 169 \\ 12 \\ \hline +\ 338 \\ 169 \\ \hline 2028 \end{array}$$

2) $AH \cdot BH = CH^2$;
$AH \cdot 5 = 12^2$;
$AH = \frac{12^2}{5} = \frac{144}{5}$;

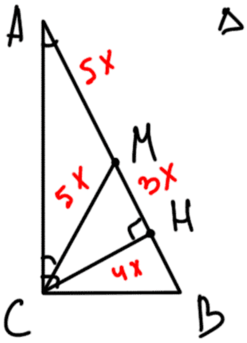
3) $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(5 + \frac{144}{5}\right) \cdot 12 = \frac{(25+144) \cdot 6}{5} = \frac{169 \cdot 12}{10} = \frac{2028}{10} = 202{,}8$

Ответ: $S = 202{,}8$

3.

√ **231** (φ – 90.3). В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены медиана CM и высота CH, причем точка H лежит между A и M. Найти $AH : AM$, если $CM : CH = 5 : 4$.

231. 2 : 5.



$\triangle CHM$: $CM^2 = CH^2 + MH^2$

$MH = 3X$

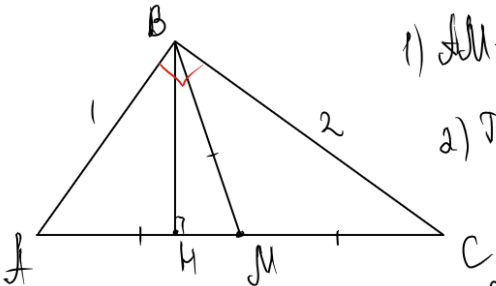
$AM = CM = 5X$

$\frac{AH}{AM} = \frac{5X + 3X}{5X} = \frac{8}{5} = 1{,}6.$

4.

В треугольнике ABC проведены высота BH и медиана BM. Найти $\cos$ ~~$\angle MHB$~~, если $AB = 1$, $BC = 2$ и $AM = BM$.

$\angle MBH$



1) $AM = BM = CM \Rightarrow \triangle ABC$ – прямоуг.
$\angle ABC = 90^\circ$.

2) Т. Пифагора: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1 + 4 = 5$
$AC = \sqrt{5}$
$AM = BM = CM = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

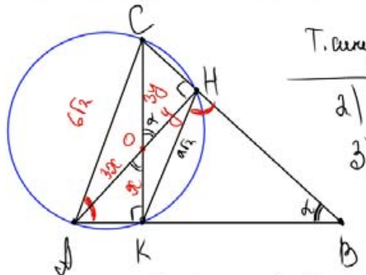
3) $BH = \frac{AB \cdot BC}{AC} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

4) $\triangle MBH$: $\cos \angle MBH = \frac{BH}{BM} = \frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{4}{5}$.

$\boxed{\frac{4}{5}}$

5.

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CK. Найти радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $HK = 2\sqrt{2}$, а площади треугольников ABC и BHK равны 18 и 2 соответственно.



Т. синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

1) Д/п: $BN \perp AC \Rightarrow BN \ni O$.

2) $\triangle CHK$: $\angle CHA = \angle CKA = 90^\circ \Rightarrow ACHK$ – впис. 4-уг-к.

3) $\angle BHK = \angle BHA - \angle KHA = 90^\circ - \angle KHA = 90^\circ - \angle KCA = \angle BAC$.

$\triangle ABC \sim \triangle HBK \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{HBK}} = \left(\frac{AC}{HK}\right)^2 \Rightarrow \frac{\cancel{18}^{9}}{\cancel{2}} = \frac{AC^2}{8}$

$AC^2 = 9\cdot 8 \Rightarrow AC = 3\cdot 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \Rightarrow k = \frac{AC}{HK} = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 3$.

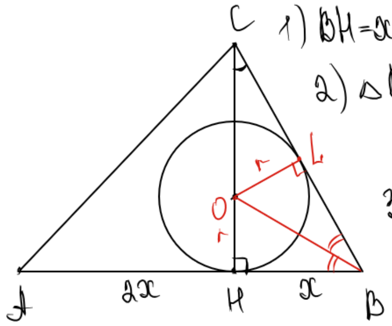
4) Пусть $OK = x \Rightarrow OA = 3x$; $OH = y \Rightarrow OC = 3y$ $\Rightarrow \triangle COH$: $\cos\alpha = \frac{y}{3y} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

5) Т. синусов: $3\frac{\cancel{6\sqrt{2}}\cdot 3}{\cancel{2\sqrt{2}}} = 2R \Rightarrow R = \frac{9}{2}$.

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{9}{2}}$

6.

На высоте $CH = \frac{\sqrt{6}}{3}$ треугольника ABC со стороной $AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$ лежит центр окружности, вписанной в угол B. Найти радиус окружности, если $AH : BH = 2:1$.



1) $BH = x \Rightarrow AH = 2x \Rightarrow AB = 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{6}$

2) $\triangle BCH$: $BC^2 = CH^2 + BH^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) Д/п: $OL \perp BC$; $OL = OH = r$.

$\triangle BCH \sim \triangle OCL \Rightarrow \frac{BC}{OC} = \frac{CH}{CL} = \frac{BH}{OL}$

$\frac{\sqrt{3}}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{3} - r\right)} = \cancel{\frac{\sqrt{6}}{3\cdot CL}} = \frac{\sqrt{3}}{6\cdot r}$

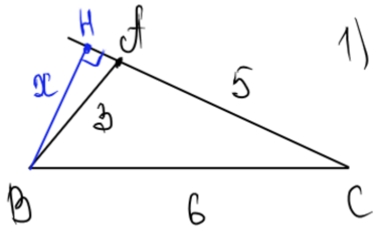
$3r = \frac{\sqrt{6}}{3} - r$; $4r = \frac{\sqrt{6}}{3}$ $r = \frac{\sqrt{6}}{12}$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{\sqrt{6}}{12}}$

7.

2. Задачи для самостоятельного решения

В треугольнике ABC дано: $AB=3$, $AC=5$ и $BC=6$. Найти расстояние от вершины C до высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.



1) $BH \perp AC$; $AB^2+AC^2=9+25=34<36=6^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAC$ – тупой.

2) $\triangle ABH$: $AH^2=AB^2-BH^2=9-x^2$;
$AH=\sqrt{9-x^2}$.

3) $\triangle BCH$: $BC^2=BH^2+CH^2$.
$36=x^2+(5+\sqrt{9-x^2})^2$

$36=\cancel{x^2}+25+10\sqrt{9-x^2}+9-\cancel{x^2}$
$2=10\sqrt{9-x^2}\ |:10$
$\sqrt{9-x^2}=\frac{1}{5}$ $9-x^2=\frac{1}{25}$

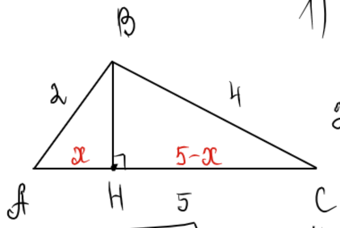
$x^2=\frac{224}{25}=\frac{16\cdot 14}{25}$; $x=\frac{4\sqrt{14}}{5}$.

$AH=5+x=5+\frac{4\sqrt{14}}{5}=\frac{25+4\sqrt{14}}{5}$

Ответ: $\frac{25+4\sqrt{14}}{5}$

1.

В треугольнике ABC дано: $AB=2$, $AC=5$ и $BC=4$. Найти площадь квадрата со стороной, равной высоте треугольника, опущенной из вершины B на сторону AC.



$\boxed{S_{\square}=BH^2}$

1) $AB^2+BC^2=4+16=20<25=5^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABC$ – тупой.

2) $2^2=x^2+BH^2$
$BH^2=4-x^2$

$4^2=(5-x)^2+BH^2$
$16=25-10x+x^2+BH^2$
$-BH^2=-16+25-10x+x^2$
$-BH^2=9-10x+x^2\ |\cdot(-1)$
$BH^2=-9+10x-x^2$

$4-\cancel{x^2}=-9+10x-\cancel{x^2}$

$4+9=10x$
$13=10x$
$x=1,3$

$S=BH^2=4-1,3^2$
$BH^2=4-1,69$
$BH^2=2,31$

Ответ: 2,31

2.