Арифметическая прогрессия

Ответы

1. 8; 3; −2. **2.** −34; −35; −36. **3.** $a_9 = 0$. **4.** $a_{15} = 20,4$. **5.** 4276. **6.** 15. **7.** 58. **8.** −3; 2. **9.** 0; 1; 2 или 5; 21; 37. **10.** 56. **11.** 202 детали. **12.** 260 книг. **13.** −36. **14.** 1; 2; 3; 4;... **15.** $-\frac{5}{12};-\frac{1}{3};-\frac{1}{4}$. **16.** $a_1 = \frac{1}{3};\ d = \frac{1}{4}$ **17.** $\frac{1}{3};\frac{2}{3};1$ **18.** 7; 12; 17; 22; 27; 32; 37. **19.** с 13-го по 32-ой. **20.** 18. **21.** $n = 13$. **22.** $a_5 = -15$. **23.** −15; −11; −7; −3 или 3; 7; 11; 15. **24.** да. **25.** $\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{1}{9}$ **26.** $x = 12; y = 7; z = 2$. **27.** −1 — 13-й член. **28.** 7 членов; первые три: 7; 10; 13, либо 1; 6; 11. **29.** $a \in (-\infty;0] \cup \{144\} \cup \{400\}$

Решения и комментарии

7. Укажите номер первого отрицательного члена арифметической прогрессии 16,8; 16,5; 16,2;… .

Решение. Найдём разность прогрессии $d = 16,5 - 16,8 = -0,3$. По формуле n-го члена составим неравенство:

$$\begin{aligned}
&a_n < 0\\
&a_1 + d(n-1) < 0\\
&16,8 - 0,3(n-1) < 0\\
&0,3n > 17,1\\
&n > 57
\end{aligned}$$

Так как $n \in N$, то 58- наименьшее натуральное число, удовлетворяющее этому неравенству.

Ответ. 58 – номер первого отрицательного члена прогрессии.

14. Найдите натуральные числа, образующие арифметическую прогрессию, если произведения трёх и четырёх превых её членов равны соответственно 6 и 24.

Решение. Перепишем условие задачи:

$$\begin{aligned}
&a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 6;\\
&a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 = 24;
\end{aligned}$$

Делим второе уравнение на первое и получаем $a_4 = 4$. С остальными числами всё просто:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$$

Поскольку все числа натуральные, ответ очевиден.

Ответ: 1; 2; 3; 4;...

16. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 5/3. Произведение третьего и четвёртого её членов равно 65/72. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

Решение. Зная сумму 1-го и 5-го членов, легко найти третий член:

$$a_1 + a_5 = a_1 + (a_1 + 4d) = 2a_1 + 4d$$
$$= 2(a_1 + 2d) = 2a_3 = \frac{5}{3}$$
$$a_3 = \frac{5}{6}$$

Учитываем это вместе со вторым условием задачи:

$$a_3 \cdot a_4 = \frac{65}{72} \Rightarrow a_4 = \frac{65}{72} \cdot \frac{6}{5} = \frac{13}{12}$$

Далее очевидно.

Ответ: $a_1 = \frac{1}{3}$; $d = \frac{1}{4}$

17. Сумма трёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна 14/9. Найдите эти числа.

Решение. Условие задачи можно записать так:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2;$$
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{14}{9}.$$

Поскольку три числа $\{a_1; a_2; a_3\}$ являются последовательными членами арифметической прогрессии, средний равен среднему арифметическому концов:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow a_1 + a_3 = 2a_2$$

Тогда сумма чисел равна

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2a_2 + a_2 = 3a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{2}{3}$$

Пусть d — разность прогрессии. Тогда $a_1 = a_2 - d$ и $a_3 = a_2 + d$, поэтому

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = (a_2 - d)^2 + a_2^2 + (a_2 + d)^2 = 3a_2^2 + 2d^2 = \frac{4}{9} + 2d^2 = \frac{14}{9}$$

Отсюда $d = \pm\frac{1}{3}$, а сами числа в порядке возрастания дадут ответ.

Ответ: $\frac{1}{3};\frac{2}{3};1$

25. Сумма трёх чисел равна 11/18, а сумма обратных им чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 18. Найдите эти числа.

Решение. Здесь удобно обозначить через $\{a_1;a_2;a_3\}$ именно обратные числа, образующие арифметическую прогрессию. Тогда условие задачи можно записать так:

$$\begin{cases} \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=\frac{11}{18} \\ a_1+a_2+a_3=18 \end{cases}$$

Поскольку числа составляю арифметическую прогрессию, средний член равен среднему арифметическому соседей:

$$a_2=\frac{a_1+a_3}{2} \Rightarrow a_1+a_3=2a_2$$

Учтём этот факт во втором уравнении системы:

$$a_1+a_2+a_3=18 \Rightarrow 3a_2=18 \Rightarrow a_2=6$$

Пусть также d — разность прогрессии. Тогда справедливы следующие факты:

$$\begin{aligned} &a_1=a_2-d=6-d; \\ &a_2=6; \\ &a_3=a_2+d=6+d. \end{aligned}$$

Подставим эти числа в первое уравнение системы:

$$\frac{1}{6-d}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6+d}=\frac{11}{18}$$

Решением этого уравнения будет $d=\pm 3$. Положим для определённости $d=3$ и получим:

$$\begin{aligned} &a_1=3; \\ &a_2=6; \\ &a_3=9. \end{aligned}$$

Далее всё очевидно.:)

Ответ: $\frac{1}{3};\frac{1}{6};\frac{1}{9}$

26. Между числами 17 и – 3 вставьте три числа, которые вместе с данными числами образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Найдём x, y, z в прогрессии $(a_n) = \{17; x; y; z; -3\}$. Так как число y равноудалено от чисел 17 и – 3, то $y = \frac{17-3}{2} = 7$. Число x - среднее арифметическое чисел 17 и y: $x = \frac{17+7}{2} = 12$. Число $z = \frac{7-3}{2} = 2$ как среднее арифметическое чисел y и – 3.

Ответ: $x = 12; y = 7; z = 2.$

27. Является ли число – 1 членом арифметической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = 3,8, b_7 = 1,4$, и если да, то каков его номер?

Решение. Так как

$$b_7 - b_1 = 6d$$
$$1,4 - 3,8 = 6d$$
$$6d = -2,4$$
$$d = -0,4,$$

то по формуле n-го члена составим уравнение:

$$b_n = b_1 + d(n-1)$$
$$-1 = 3,8 - 0,4(n-1)$$
$$0,4n = 5,2$$
$$n = 13 \in N$$

Ответ: - 1 является членом номер 13 арифметической прогрессии (b_n).

28. Найти число членов арифметической прогрессии, у которой сумма всех членов равна 112, произведение второго члена на разность прогрессии равно 30, а сумма третьего и пятого членов равна 32. Написать три первых члена прогрессии.

Решение. Из условия получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = 112 \\ (a_1 + d) \cdot d = 30 \\ a_1 + 2d + a_1 + 4d = 32 \end{cases}$$

Требуется найти $n; a_1; a_2; a_3$.

Из третьего уравнения выразим a_1 и подставим во второе уравнение:

$$(16 - 3d + d) \cdot d = 30$$
$$2d^2 - 16d + 30 = 0$$
$$d^2 - 8d + 15 = 0$$
$$(d-3)(d-5) = 0$$

$$2a_1 + 6d = 32 \qquad \left[\begin{array}{l} d = 3 \Rightarrow a_1 = 7 \\ d = 5 \Rightarrow a_1 = 1 \end{array}\right.$$
$$a_1 = 16 - 3d$$

1) Рассмотрим сначала прогрессию, в которой $d=3, a_1=7$. Первые три её члена равны 7;10;13. Найдём количество членов этой прогрессии. Из первого уравнения получим:

$$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=112$$
$$\frac{14+3(n-1)}{2}\cdot n=112$$
$$n(3n+11)=224$$

$$3n^2+11n-224=0$$
$$D=121+12\cdot 224=2809$$
$$\left[\begin{array}{l} n=\dfrac{-11-53}{6}\notin N \\ n=\dfrac{-11+53}{6}=7 \end{array}\right.$$

Значит, в этой прогрессии семь членов и первые три из них равны 7; 10; 13.

2) Рассмотрим прогрессию, в которой $d=5, a_1=1$. Первые три её члена равны 1; 6 ;11. Найдём количество членов этой прогрессии. Из первого уравнения получим:

$$S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n=112$$
$$\frac{2+5(n-1)}{2}\cdot n=112$$
$$n(5n-3)=224$$
$$5n^2-3n-224=0$$
$$D=9+20\cdot 224=4489$$
$$\left[\begin{array}{l} n=\dfrac{3+67}{10}=7 \\ n=\dfrac{3-67}{10}\notin N \end{array}\right.$$

Значит, в этой прогрессии семь членов и первые три из них равны 1; 6; 11.

Ответ: число членов прогрессии равно 7, а первые три члена прогрессии равны либо 7; 10; 13, либо 1; 6; 11.

29. Известно, что уравнение $x^4-40x^2+a=0$ имеет не менее двух действительных корней, образующих арифметическую прогрессию. Найдите a.

Ответ: $a\in(-\infty;0]\cup\{144\}\cup\{400\}$