Касательная к окружности

Ответы

1. Касательная в явном виде

1.1. $\frac{25}{8}$. **1.2.** $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

2. Касательные — стороны многоугольников

2.1. $\frac{91}{6+\sqrt{6}}$. **2.2.** $\frac{147}{8}$. **2.3.** $9:8$. **2.4.** 10. **2.5.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

3. Общие касательные и их свойства

3.1. 112,5. **3.2.** 4. **3.3.** $6-2\sqrt{6}$.

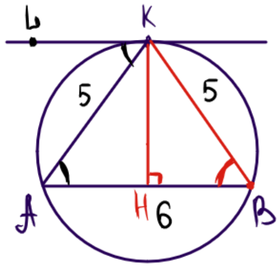
4. Комбинированные задачи

4.1. $\frac{\pi}{6}$. **4.2.** $\frac{32}{5}$. **4.3.** $5\sqrt{\frac{3}{7}}$. **4.4.** 9. **4.5.** $10r^2\left(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$.

Решения и комментарии

1. Касательная в явном виде

Прямая, касающаяся окружности в точке K, параллельна хорде $AB=6$. Найти радиус окружности, если $AK=5$.



1) $\angle AKL = \angle BAK$ (внутр. накр. леж.)
$\angle AKL = \angle ABK$ (угол между кас. KL и хордой AK) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABK$ – равнобедр. $AK = BK$.

2) Д/п: $KH \perp AB \Rightarrow AH = BH = 3 \Rightarrow KH = 4$

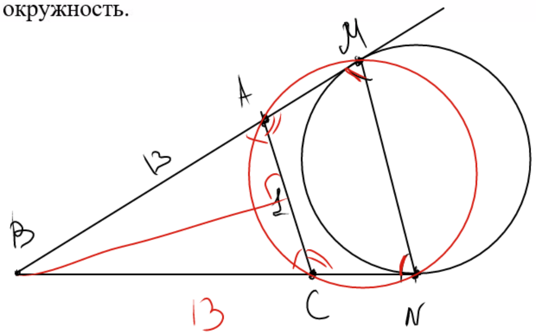
$\sin A = \frac{4}{5}$.

3) т. синусов: $\frac{BK}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{5\cdot 5}{4\cdot 2} = \boxed{\frac{25}{8}}$.

Ответ: $\frac{25}{8}$

1.1.

Окружность касается в точках M и N продолжений сторон $AB = 13$ и BC треугольника ABC за точки A и C. Найти площадь треугольника. Если $AC = 1$, а через точки A, C, M и N можно провести окружность.



$169 - \frac{1}{4}$

$h^2 = \frac{675}{4}$ $\quad h^2 = \frac{25\cdot 27}{4}$ $\quad 169 \times 4 = 676$

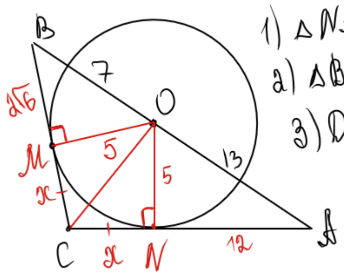
$h = \frac{5\cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{15\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$

1.2.

2. Касательные — стороны многоугольников

Окружность радиуса 5 с центром O, лежащим на стороне AB треугольника ABC, касается сторон AC и BC. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AO = 13$ и $BO = 7$.



1) $\triangle NAO$: $AN^2 = 13^2 - 5^2 = 8\cdot 18 = 16\cdot 9 \Rightarrow AN = 4\cdot 3 = 12$.

2) $\triangle BOM$: $BM^2 = 7^2 - 5^2 = 2\cdot 12 = 6\cdot 4 \Rightarrow BM = 2\sqrt{6}$.

3) D/n: CO — биссектр $\Rightarrow \frac{BO}{AO} = \frac{BC}{AC}$ $\quad \frac{7}{13} = \frac{x + 2\sqrt{6}}{x + 12}$

$7x + 7\cdot 12 = 13x + 26\cdot\sqrt{6}$ $\quad x = \frac{42 - 13\sqrt{6}}{3}$

$6x = 7\cdot 12 - 26\sqrt{6}$

4) $\triangle ANO$: $\sin\angle A = \frac{5}{13}$;

$\triangle ABC$: т. синусов: $\frac{BC}{\sin\angle A} = 2R \Rightarrow R = \frac{\left(2\sqrt{6} + 14 - \frac{13\sqrt{6}}{3}\right)\cdot 13}{2\cdot 5} =$

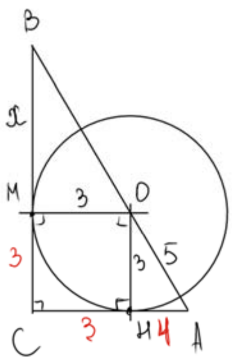
$= \frac{91(6 - \sqrt{6})}{30}$

Ответ: $\frac{91\cdot(6 - \sqrt{6})}{30}$

2.1.

Окружность радиуса 3, центр O которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника, касается катетов. Найдите площадь треугольника, если $OA = 5$.

234



1) $\triangle AOH$: $AH^2 = AO^2 - OH^2 =$
$= 5^2 - 3^2 =$
$= 16$

$AH = 4$.

2) $\triangle MOB \sim \triangle HAO$.

$\frac{MO}{HA} = \frac{OB}{AO} = \frac{MB}{HO}$

$\frac{3}{4} = \frac{OB}{5} = \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{x}{3} \Rightarrow 4x = 9$

$x = \frac{9}{4}$

$147 : 8 = 18{,}375$

3) $BC = CM + MB = 3 + \frac{9}{4} = \frac{21}{4}$; $AC = 3 + 4 = 7$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot \frac{21}{4} = \frac{147}{8} = 18{,}375$. Ответ: $\frac{147}{8}$.

2.2.

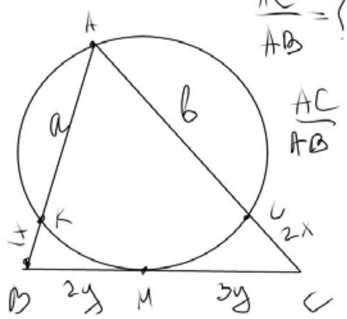
Окружность, проходящая через вершину A треугольника ABC, касается стороны BC в точке M и пересекает стороны AB и AC в точках K и L соответственно. Найти $AC:AB$, если $KB:LC=1:2$ и $CM:BM=3:2$.

$x\cdot(x+a)=4y^2$

$2x\cdot(2x+b)=9y^2$

$AB=x+a=\frac{4y^2}{x}$

$AC=2x+b=\frac{9y^2}{2x}$



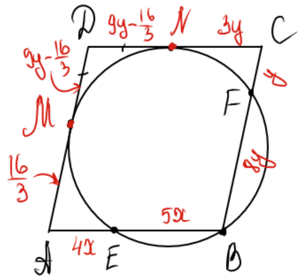
$\frac{AC}{AB}=?$ $\quad \frac{b+2x}{a+x}=?$

$\frac{AC}{AB}=\frac{9y^2}{2x}\cdot\frac{x}{4y^2}=\frac{9}{8}$

$=1{,}125$

2.3.

Окружность, касающаяся сторон AD и CD параллелограмма $ABCD$, проходит через точку B и пересекает стороны $AB=8$ и BC в точках E и F соответственно. Найти AD, если $AE:BE=4:5$ и $BF:CF=8:1$.



1) Пусть M и N — точки касания $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ AB — секущая AM — касат. $\Rightarrow AM^2=AE\cdot AB$

Аналогично $NC^2=CF\cdot CB$.

2) Пусть $AE=4x \Rightarrow BE=5x \Rightarrow AB=9x=8$ $\quad \boxed{x=\frac{8}{9}}$

$CF=y \Rightarrow BF=8y \Rightarrow BC=9y$.

Тогда: $AM^2=4x\cdot 9x=36x^2 \Rightarrow AM=6x=\frac{6\cdot 8}{9}=\frac{16}{3}$.

$NC^2=y\cdot 9y=9y^2 \Rightarrow NC=3y$

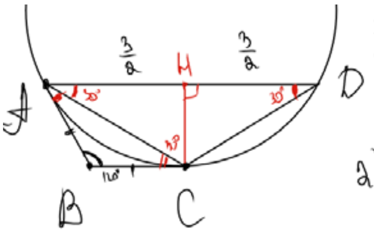
3) $AD=BC=9y \Rightarrow ND=MD=9y-\frac{16}{3} \Rightarrow CD=12y-\frac{16}{3}=8 \,|:4|\cdot 3 \Rightarrow 9y-4=6$

$9y=10$

$\boxed{y=\frac{10}{9}}$

4) $y=\frac{10}{9} \Rightarrow AD=9y=\boxed{10}$. Ответ: 10

2.4.



Боковая сторона AB и основание BC трапеции $ABCD$ касаются окружности. Описанной около треугольника ACD. Найти площадь этого треугольника, если $AD=3$ и $\angle B=120°$.

1) $BA=BC$ (касат.) $\Rightarrow \angle BAC=\angle BCA=30° \Rightarrow \angle CDA=30°$

2) $\angle DAC=\angle BCA=30° \Rightarrow \triangle ACD$ — равнобедр.

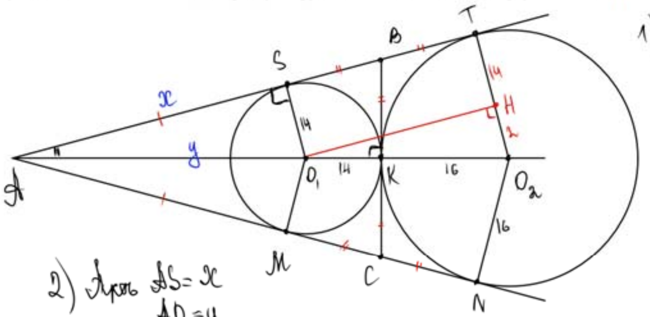
Д/п: $CH\perp AD \Rightarrow AH=DH=\frac{3}{2} \Rightarrow CH=AH\cdot \operatorname{tg} DAC=$
$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

2.5.

3. Общие касательные и их свойства

Две касающиеся внешним образом в точке K окружности, радиусы которых равны 14 и 16, касаются сторон угла с вершиной A. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку K, пересекает стороны угла в точках B и C. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.



1) $O_1O_2 = 14+16 = 30$

Д/п: $O_1H \perp TO_2$

$\triangle O_1HO_2$: $O_1H^2 = 30^2 - 2^2 = 28\cdot 32 = 64\cdot 14$.

$\boxed{O_1H = 8\sqrt{14}}$

$SB = KB = TB = 4\sqrt{14}$.

2) Пусть $AS = x$, $AO_1 = y$

Тогда: $\boxed{x^2+14^2=y^2}$ $\triangle ASO_1 \sim \triangle AKB$ $\frac{AS}{AK} = \frac{SO_1}{KB} = \frac{AO_1}{AB}$ $\boxed{\frac{x}{y+14} = \frac{14}{4\sqrt{14}}}$

$$\begin{cases} x^2+14^2=y^2 \\ \frac{x}{y+14} = \frac{\sqrt{14}}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=y^2-14^2 \\ \frac{x^2}{(y+14)^2} = \frac{7}{8} \end{cases} \quad \frac{(y-14)\cancel{(y+14)}}{(y+14)^{\cancel{2}}} = \frac{7}{8}$$

$8(y-14) = 7(y+14)$.

$8y - 8\cdot 14 = 7y + 7\cdot 14$

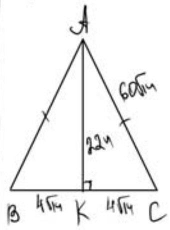
$y = 15\cdot 14 = 210$

$x = 56\sqrt{14}$

$x^2 = (14\cdot 15)^2 - 14^2 = 14\cdot 14\cdot 14\cdot 16$

$x = 14\cdot 4\cdot\sqrt{14}$

3) $\triangle ABC$:



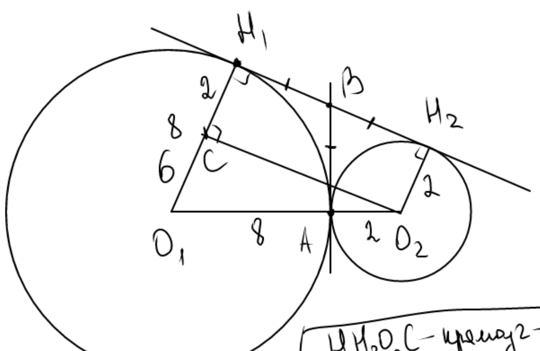
$\frac{AB}{\sin C} = 2R$

$R = \frac{60\sqrt{14}\cdot 60\sqrt{14}}{224\cdot 2} = \frac{3600\cdot\cancel{14}}{16\cdot\cancel{14}\cdot 2} = \frac{225}{2} = 112{,}5.$

Ответ: $\boxed{112{,}5}$

3.1.

Две окружности радиусов 2и 8 касаются друг друга внешним образом в точке A. Общая касательная к ним, проведенная через точку A, пересекает другую общую касательную в точке B. Найти AB.



$\boxed{\begin{array}{l} H_1H_2O_2C \text{ – прямоуг-к} \\ \angle O_1H_1H_2 = \angle O_2H_2H_1 = 90^\circ \\ CO_2 \parallel H_1H_2 \end{array}}$

$\triangle O_1O_2C$: $O_1C = O_1H_1 - CH_1 = 8-2 = 6$

$O_1O_2 = O_1A + AO_2 = 8+2 = 10$

$\angle O_1CO_2 = 90^\circ$.

$O_2C^2 = 10^2 - 6^2 = 100-36 = 64$.

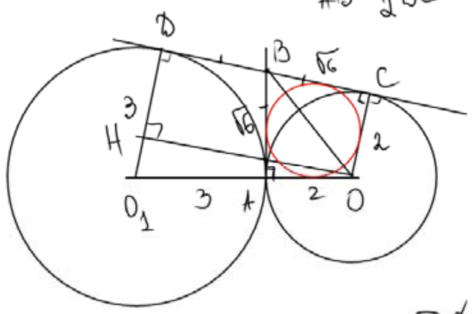
$O_2C = \sqrt{64} = 8$.

$AB = \frac{1}{2}H_1H_2 = \frac{1}{2}\cdot O_2C = \frac{1}{2}\cdot 8 = 4$.

Ответ: 4.

3.2.

Окружности радиусов 2 и 3 касаются друг друга внешним образом в точке A. Общая касательная к ним в точке A пересекает в точке B другую общую касательную, касающуюся в точке C меньше окружности с центром O. Найти радиус окружности, вписанной в четырехугольник $OABC$.



$AB=\frac{1}{2}DC$

$\triangle OO_1H: OO_1^2=O_1H^2+OH^2$

$5^2=1^2+OH^2$

$OH^2=25-1=24$

$OH=\sqrt{24}=\sqrt{4\cdot6}=2\sqrt{6}$

$BC=AB=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{6}=\sqrt{6}$

$S_{\triangle}=\frac{p\cdot r}{2}$

$S_{\square}=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot2$

$\frac{p\cdot r}{2}=ab$

$\frac{r(2\sqrt{6}+4)}{2}=\sqrt{6}\cdot2$

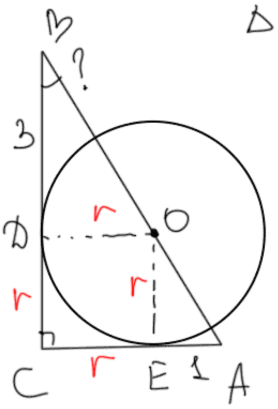
$r=\frac{\sqrt{6}\cdot\cancel{2}\cdot2}{\cancel{2}(\sqrt{6}+2)}=\frac{2\sqrt{6}\cdot(\sqrt{6}-2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=\frac{2\sqrt{6}(\sqrt{6}-2)}{6-4}=$

$=\frac{2\sqrt{6}(\sqrt{6}-2)}{2}=\sqrt{6}(\sqrt{6}-2)$

3.3.

4. Комбинированные задачи

Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, касается катетов AC и BC в точках E и D соответственно. Найдите угол B, если $AE = 1$, $BD = 3$. Ответ дайте в градусах.



$\triangle ABC\sim\triangle OBD$

$\frac{AC}{OD}=\frac{BC}{BD}$

$\frac{r+1}{r}=\frac{r+3}{3}$

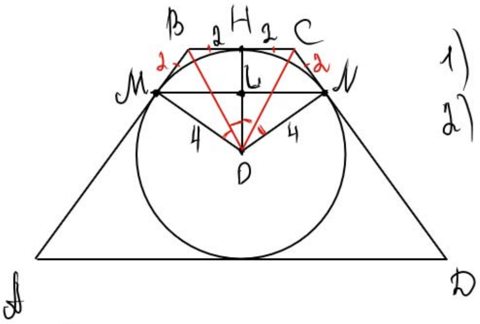
$\cancel{1}+\frac{1}{r}=\frac{r}{3}+\cancel{1}$

$r^2=3 \quad r=\sqrt{3}$

$\triangle OBD: \operatorname{tg}B=\frac{r}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow B=30^\circ$

4.1.

249. Одно и оснований равнобедренной трапеции равно 4. Найти расстояние между точками касания с ее боковыми сторонами вписанной в нее окружности радиуса 4.



1) $BM = BH = CH = CN = 2$ (касат.)

2) Д/п: BO и CO; $BC \perp OH \Rightarrow \Delta BOH = \Delta COH$

ΔBOH: $BO^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow BO = 2\sqrt{5}$.

$\sin\angle BOH = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos\angle BOH = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

3) $\angle MOH = 2\cdot\angle BOH \Rightarrow$

$\sin\angle MOH = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$;

$\cos\angle MOH = 2\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$;

4) ΔLOM: $MO = 4$;

$ML = MO\cdot\sin\angle MOH = 4\cdot\frac{4}{5} = \frac{16}{5}$;

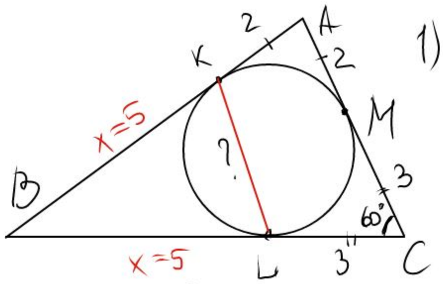
$MN = 2\cdot ML = 2\cdot\frac{16}{5} = \frac{32}{5}$.

Ответ: $\boxed{\frac{32}{5}}$

4.2.

Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторона AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. Найдите KL, если $AM = 2$, $MC = 3$ и $\angle C = \pi/3$

$\boxed{AB = x+2;\ AC = 5;\ BC = x+3;\ \angle C = 60^\circ}$



1) ΔABC: $BK = BL = x$;

$(x+2)^2 = 25 + (x+3)^2 - 2\cdot 5\,(x+3)\cdot\cos 60^\circ$

$(x+2)^2 - (x+3)^2 = 25 - 5(x+3)$

$(x+2+x+3)(x+2-x-3) = 25 - 5x - 15$

$-2x - 5 = -5x + 10$

$3x = 15 \Rightarrow \boxed{x = 5}$

2) ΔABC: $5^2 = 7^2 + 8^2 - 2\cdot 7\cdot 8\cdot\cos B$

$25 = 49 + 64 - 2\cdot 56\cdot\cos B$

$2\cdot 7\cdot 8\cdot\cos B = 88$

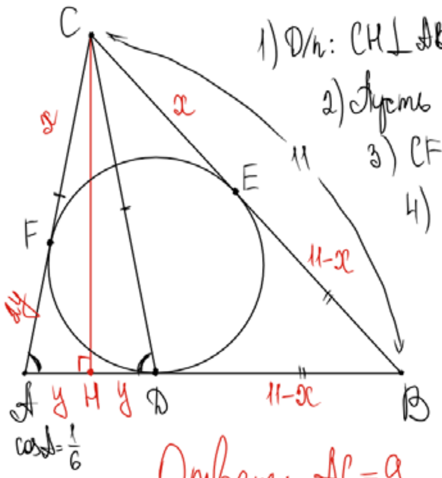
$\cos B = \frac{11}{14}$

3) ΔBKL: $KL^2 = 25 + 25 - 2\cdot 25\cdot\frac{11}{14} = 50\left(\frac{14-11}{14}\right) = \frac{50\cdot 3}{14} = \frac{75}{7}$.

Ответ: $\boxed{KL = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}$

4.3.

Вписанная в треугольник ABC окружность касается стороны AB в точке D. Найти AC, если $AC = CD$, $BC = 11$ и $\cos\angle A = \frac{1}{6}$.



1) Д/п: $CH \perp AB$ — высота $\Rightarrow AH = DH$ (т.к. $AC = CD$)

2) Пусть $CE = x \Rightarrow BE = 11 - x$; $AH = DH = y$;

3) $CF = CE = x$; $BD = BE = 11 - x$; $AD = AF = 2y$.

4) $\triangle ACH$: $\cos A = \frac{y}{2y+x} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6y = 2y + x$
$x = 4y$.

$AC^2 = AH^2 + CH^2$

$(6y)^2 = y^2 + CH^2$ $\quad CH^2 = 35y^2$

5) $\triangle BCH$: $BC^2 = BH^2 + CH^2$

$11^2 = (y + 11 - 4y)^2 + 35y^2$

$11^2 = (11 - 3y)^2 + 35y^2$

$\cancel{11^2} = \cancel{11^2} - 66y + 9y^2 + 35y^2$

$44y^2 - 66y = 0$

$y = 0$ — чё?:)

$y = \frac{66}{44} = \frac{3}{2}$

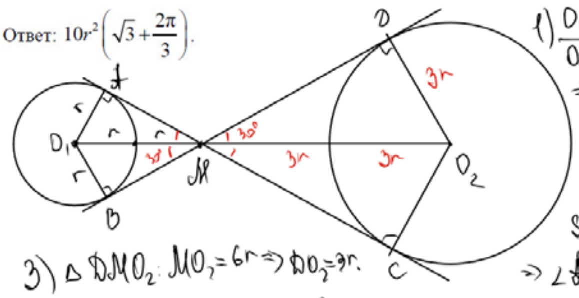
$AC = 6y = 9$.

Ответ: $AC = 9$.

4.4.

239*. Точка пересечения двух общих касательных к двум непересекающимся окружностям, меньшая из которых имеет радиус r, лежит на линии их центров на расстоянии $6r$ от центра больше окружности и делит отрезок касательной между точками касания в отношении $1:3$. Найти площадь фигуры, состоящей и двух частей. Ограниченных касательными и большими дугами окружностей.

Ответ: $10r^2\left(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$.



1) $\frac{O_1M}{O_2M} = \frac{1}{3}$; $O_2M = 6r \Rightarrow$
$\Rightarrow O_1M = \frac{1}{3}O_2M = 2r$;

2) $\triangle AO_1M$: $\angle MAO_1 = 90°$ (касат. и радиус)
$\sin AMO_1 = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AMO_1 = 30°$.

3) $\triangle DMO_2$: $MO_2 = 6r \Rightarrow DO_2 = 3r$.

4) $S_{\triangle AMO_1} = \frac{1}{2}\cdot r\cdot 2r\cdot\sin 60° = \frac{r^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{AMBO_1} = r^2\sqrt{3}$;
$S_{\triangle DMO_2} = \frac{1}{2}\cdot 3r\cdot 6r\cdot\sin 60° = \frac{9r^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{DMCO_2} = 9r^2\sqrt{3}$ $\Rightarrow S_{фиг} = 10r^2\sqrt{3}$;

5) $S_{сек\,O_1} = \frac{\pi r^2}{360}\cdot 240 = \frac{2\pi r^2}{3}$; $S_{сек\,O_2} = \frac{\pi\cdot 9r^2}{360}\cdot 240 = \frac{18\pi r^2}{3}$ $\Rightarrow S_{сек} = \frac{20\pi r^2}{3}$

6) $S_{общ} = 10r^2\sqrt{3} + \frac{20\pi r^2}{3} = 10r^2\left(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}\right)$. $\boxed{\text{Ответ: } 10r^2\left(\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}$

4.5.